Περιστρεφόμενα Διανύσματα

και οι χρήσεις τους στις ταλαντώσεις

Γιώργος Παπαδημητρίου

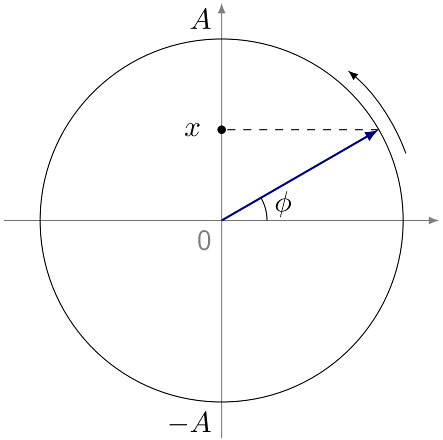
2^{ο} ΓΕΛ Ναυπάκτου

13 Νοεμβρίου 2020

Περιστρεφόμενο Διάνυσμα

Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι μία κίνηση με μεταβλητή ταχύτητα και μεταβλητή επιτάχυνση.
Μπορεί όμως να συνδεθεί με *μία ομαλή περιστροφική κίνηση* ενός διανύσματος μήκους A.
Στο διπλανό σχήμα αν θέσουμε $\phi = \omega t$ τότε η προβολή του άκρου του διανύσματος στον $y'y$ άξονα κάνει α.α.τ., αφού

$$x = A\text{ημ}\,\omega t \qquad (1)$$



Εφαρμογές

Α. Αρχική φάση

Ας υποθέσουμε ότι ένα σύστημα κάνει α.α.τ. με πλάτος $A = 10\text{cm}$ *και την χρονική στιγμή* $t = 0$ *η απομάκρυνση είναι* $x_1 = 5\sqrt{3}\text{cm}$ *και η ταχύτητα* $v < 0$*. Ζητάμε την αρχική φάση* ϕ_0 *της ταλάντωσης.*

Εφαρμογές

Α. Αρχική φάση

Ας υποθέσουμε ότι ένα σύστημα κάνει α.α.τ. με πλάτος $A = 10$cm *και την χρονική στιγμή* $t = 0$ *η απομάκρυνση είναι* $x_1 = 5\sqrt{3}$cm *και η ταχύτητα* $v < 0$. *Ζητάμε την αρχική φάση* ϕ_0 *της ταλάντωσης.*

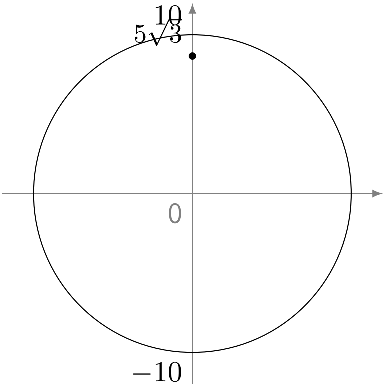
Ξεκινάμε σχεδιάζοντας τον κύκλο ακτίνας $A = 10$cm και βρίσκουμε την θέση $x_1 = 5\sqrt{3}$cm στον $y'y$ άξονα.

Εφαρμογές

Α. Αρχική φάση

Ας υποθέσουμε ότι ένα σύστημα κάνει α.α.τ. με πλάτος $A = 10\text{cm}$ *και την χρονική στιγμή* $t = 0$ *η απομάκρυνση είναι* $x_1 = 5\sqrt{3}\text{cm}$ *και η ταχύτητα* $v < 0$. *Ζητάμε την αρχική φάση* ϕ_0 *της ταλάντωσης.*

Ξεκινάμε σχεδιάζοντας τον κύκλο ακτίνας $A = 10\text{cm}$ και βρίσκουμε την θέση $x_1 = 5\sqrt{3}\text{cm}$ στον $y'y$ άξονα.

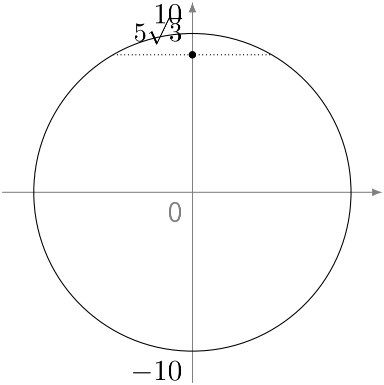


Εφαρμογές

Α. Αρχική φάση

Ας υποθέσουμε ότι ένα σύστημα κάνει α.α.τ. με πλάτος $A = 10\text{cm}$ *και την χρονική στιγμή* $t = 0$ *η απομάκρυνση είναι* $x_1 = 5\sqrt{3}\text{cm}$ *και η ταχύτητα* $v < 0$*. Ζητάμε την αρχική φάση* ϕ_0 *της ταλάντωσης.*

Σχεδιάζουμε μία οριζόντια γραμμή που διέρχεται από το σημείο $x_1 = 5\sqrt{3}\text{cm}$ και τέμνει τον κύκλο σε σύο σημεία.
Τα σημεία αυτά είναι οι πιθανές θέσεις του περιστρεφόμενου διανύσματος.

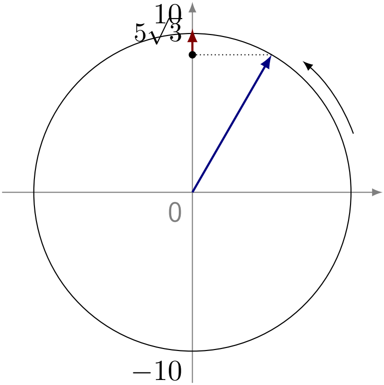


Εφαρμογές

Α. Αρχική φάση

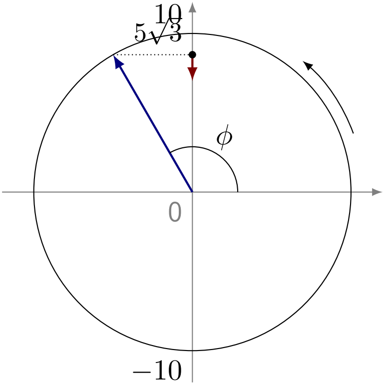
Ας υποθέσουμε ότι ένα σύστημα κάνει α.α.τ. με πλάτος $A = 10\text{cm}$ *και την χρονική στιγμή* $t = 0$ *η απομάκρυνση είναι* $x_1 = 5\sqrt{3}\text{cm}$ *και η ταχύτητα* $v < 0$. *Ζητάμε την αρχική φάση* ϕ_0 *της ταλάντωσης.*

Αν το περιστρεφόμενο ήταν στην πρώτη θέση, τότε η ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος θα ήταν θετική.
(Η φορά περιστροφής είναι αντιωρολογιακή πάντα...)



Ας υποθέσουμε ότι ένα σύστημα κάνει α.α.τ. με πλάτος $A = 10\text{cm}$ και την χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση είναι $x_1 = 5\sqrt{3}\text{cm}$ και η ταχύτητα $v < 0$. Ζητάμε την αρχική φάση ϕ_0 της ταλάντωσης.

Στην δεύτερη θέση η ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος είναι αρνητική.
Άρα αυτή είναι η σωστή θέση του περιστρεφόμενου διανύσματος.
Τώρα μένει να βρούμε την γωνία ϕ η οποία είναι η αρχική φάση ϕ_0.



Εφαρμογές

Α. Αρχική φάση

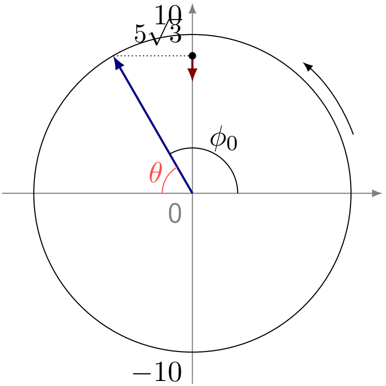
Ας υποθέσουμε ότι ένα σύστημα κάνει α.α.τ. με πλάτος $A = 10\text{cm}$ και την χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση είναι $x_1 = 5\sqrt{3}\text{cm}$ και η ταχύτητα $v < 0$. Ζητάμε την αρχική φάση ϕ_0 της ταλάντωσης.

Είναι ευκολότερο να βρούμε την γωνία θ η οποία μεταφέρεται εύκολα στο ορθογώνιο τρίγωνο.

$$\text{ημ}\,\theta = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \qquad (2)$$

Επομένως

$$\phi_0 = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad}$$



Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το περιστρεφόμενο διάνυσμα για λύση ασκήσεων που περιέχουν ανισότητες, όπως το πρόβλημα 1.39 σελ. 38 του σχολικού βιβλίου:
Ένα σύστημα κάνει α.α.τ. με πλάτος $A = 20\text{cm}$ *και περίοδο* $T = 10\text{s}$. *Να υπολογίσετε για πόσο χρόνο (μέχρι να επιστρέψει στη θέση ισορροπίας) η απομάκρυνσή του θα είναι μεγαλύτερη από 10*cm.

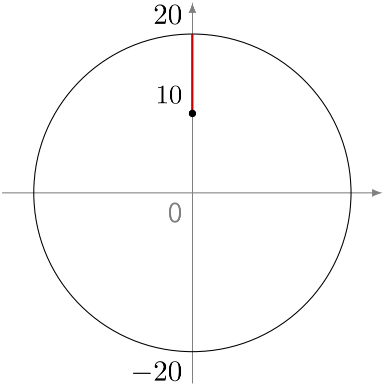
Δηλαδή μας ζητάει να λύσουμε την ανίσωση

$$x > 10$$

ως προς χρόνο ($x = A\text{ημ}\,\omega t$)

Κατασκευάζουμε τον κύκλο ακτίνας $A = 20\text{cm}$, στον οποίο θα περιστρέφεται το διάνυσμα, και σημειώνουμε την θέση $x = 10\text{cm}$ στον άξονα $y'y$ της ταλάντωσης.

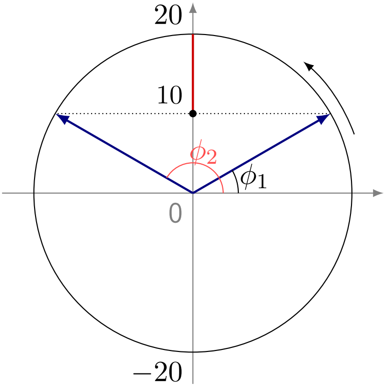
Οι θέσεις όπου ισχύει $x > 10$ σημειώνονται με κόκκινο χρώμα.



Βρίσκουμε τις θέσεις του περιστρεφόμενου για τις οποίες ισχύει $x > 10$cm στον άξονα της ταλάντωσης.

Σχεδιάζουμε το περιστρεφόμενο στις ακραίες θέσεις, στις οποίες ισχύει η ισότητα

$$x = 10$$



Εφαρμογές

Β. Επίλυση ανισώσεων

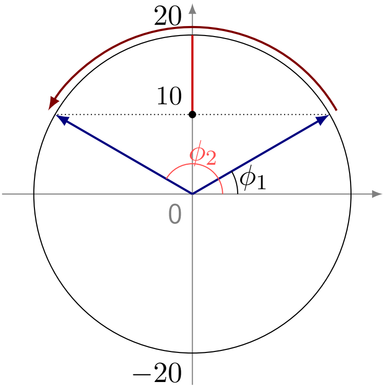
Έχουμε ήδη λύσει την ανίσωση ημ $\omega t > \frac{1}{2}$ για $0 < \phi < \pi$.

$$\frac{\pi}{6} < \phi < \frac{5\pi}{6}$$

αφού οι γωνίες ϕ_1, ϕ_2 υπολογίζονται εύκολα.

Όμως ζητάμε τον χρόνο. Η γωνία που διαγράφει το περιστρεφόμενο μεταξύ των ακραίων θέσεων είναι

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{3}$$

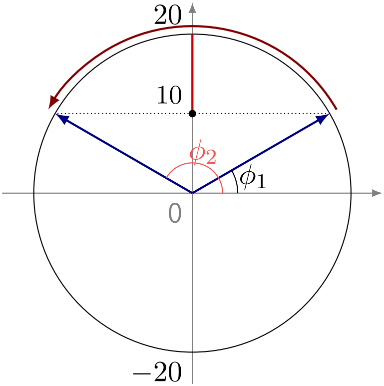


Η γωνία που διαγράφει το περιστρεφόμενο μεταξύ των ακραίων θέσεων είναι $\Delta\phi = \frac{2\pi}{3}$ και το περιστρεφόμενο κάνει ομαλή περιστροφική κίνηση, άρα

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi/3}{2\pi/T} = \frac{T}{3} \qquad (3)$$

(*piece of cake!*)



Εφαρμογές

Γ. Χρονικά διαστήματα

Με το περιστρεφόμενο υπολογίζουμε εύκολα το χρονικό διάστημα μετάβασης από μία θέση x_1 σε μία θέση x_2 στην ταλάντωση.

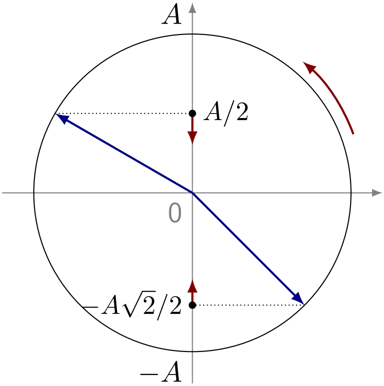
Έστω ότι μας ζητείται να βρούμε το χρ. διάστημα για να μεταβεί το σώμα από τη θέση $x_1 = +A/2$ με $v_1 < 0$ στη θέση $x_2 = -A\sqrt{2}/2$ με $v_2 > 0$. Δίνεται η περίοδος T

Εφαρμογές

Γ. Χρονικά διαστήματα

Με το περιστρεφόμενο υπολογίζουμε εύκολα το χρονικό διάστημα μετάβασης από μία θέση x_1 σε μία θέση x_2 στην ταλάντωση.

Έστω ότι μας ζητείται να βρούμε το χρ. διάστημα για να μεταβεί το σώμα από τη θέση $x_1 = +A/2$ με $v_1 < 0$ στη θέση $x_2 = -A\sqrt{2}/2$ με $v_2 > 0$. Δίνεται η περίοδος T



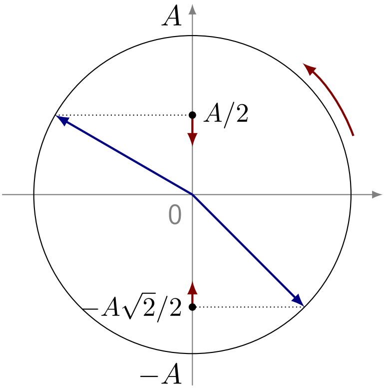
Εφαρμογές

Γ. Χρονικά διαστήματα

Με το περιστρεφόμενο υπολογίζουμε εύκολα το χρονικό διάστημα μετάβασης από μία θέση x_1 σε μία θέση x_2 στην ταλάντωση.

Έστω ότι μας ζητείται να βρούμε το χρ. διάστημα για να μεταβεί το σώμα από τη θέση $x_1 = +A/2$ με $v_1 < 0$ στη θέση $x_2 = -A\sqrt{2}/2$ με $v_2 > 0$. Δίνεται η περίοδος T

Σχεδιάζουμε τα περιστρεφόμενα διανύσματα στις κατάλληλες θέσεις (προσέχοντας τις ταχύτητες!)



Εφαρμογές

Γ. Χρονικά διαστήματα

Τώρα το μόνο που μένει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την γωνία $\Delta\phi$ που γράφει το περιστρεφόμενο καθώς μεταβαίνει από την αρχική στην τελική του θέση.

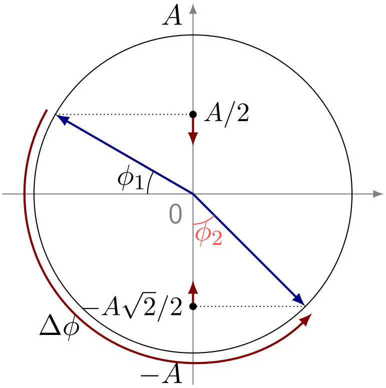
Από τα τρίγωνα υπολογίζουμε εύκολα:

$$\phi_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \phi_2 = \frac{\pi}{4}$$

Άρα $\Delta\phi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}$, επομένως

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega}$$

$$\Delta t = \frac{11\pi/12}{2\pi/T} = \frac{11}{24}T \qquad (4)$$

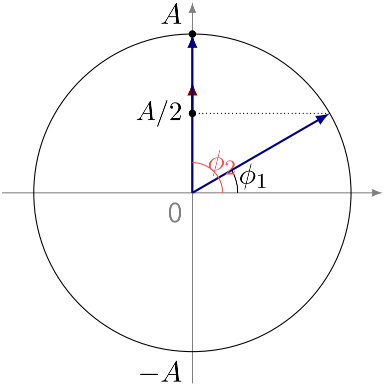


Εξάσκηση

α.

Υπολογίστε τον χρόνο που χρειάζεται για να μεταβεί το σώμα από τη θέση $x_1 = +A/2$, $v_1 > 0$ στην ακραία θέση της ταλάντωσής του.

Δίνεται η περίοδος T και το διπλανό σχήμα:

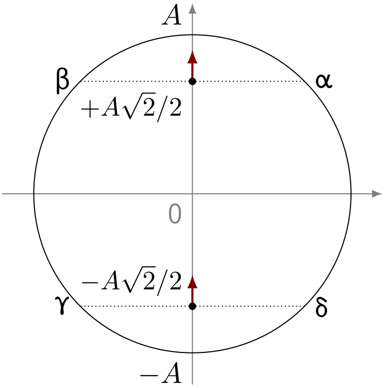


Εξάσκηση

β.

Υπολογίστε τον χρόνο που χρειάζεται για να μεταβεί το σώμα από τη θέση $x_1 = -A\sqrt{2}/2$, $v_1 > 0$ στην θέση $x_2 = +A\sqrt{2}/2$, $v_2 > 0$ της ταλάντωσής του.

Δίνεται η περίοδος Τ και το διπλανό σχήμα:



Εξάσκηση

γ.

Σώμα που κάνει αρμονική ταλάντωση κάποια στιγμή διέρχεται από τη θέση $x_1 = -A\sqrt{3}/2$, $v_1 < 0$. Υπολογίστε τον ελάχιστο χρόνο που χρειάζεται για περάσει το σώμα ξανά από την ίδια θέση.

Δίνεται η περίοδος T και το διπλανό σχήμα: