2.1 Ορμή και Δύναμη

2.1.1 Ορισμοί

Η ορμή $\vec{p}$ ενός σώματος είναι το διάνυσμα της ταχύτητας πολλαπλασιασμένο επί τη μάζα m του σώματος:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.1}$$

Και όπως είναι εμφανές από τον ορισμό, η ορμή $\vec{p}$ έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{v}$ κάθε στιγμή.

2.1.2 Ο β′ νόμος του Νεύτωνα

Αν δεν ασκείται δύναμη στο σώμα $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ τότε σύμφωνα με τον 1ο Νόμο της κίνησης το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$.

Αν όμως ασκηθεί δύναμη τότε αλλάζει η ταχύτητα $\vec{v}$ και η ορμή $\vec{p}$.

Ο Νεύτωνας μας έδωσε τον νόμο της αλλαγής:

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}} \tag{2.2}$$

Δηλαδή: **Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η συνισταμένη δύναμη.**

Η εξίσωση (2.2) είναι **η γενίκευση** της γνωστής σχέσης $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ με το πλεονέκτημα ότι *ισχύει και όταν μεταβάλλεται η μάζα των σωμάτων.*

Θυμίζουμε ότι:

- Ο 2ος Νόμος ισχύει **για μικρές ταχύτητες** $v \ll c$ όπου $c = 3 \cdot 10^8\mathrm{m/s}$ είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό.
- Ο 2ος Νόμος ισχύει **σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς**, δηλαδή σε συστήματα στα οποία ισχύει ο 1ος Νόμος.

2.1.3 Ορμή και κινητική ενέργεια

Μία πολύ ενδιαφέρουσα σχέση της ορμής με την κινητική ενέργεια μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m}$$

$$\boxed{K = \frac{p^2}{2m}} \tag{2.3}$$

Η οποία είναι πολύ χρήσιμη σε μερικές περιπτώσεις και καλό είναι να την ξέρουμε (με την απόδειξή της)

2.1.4 Η μεταβολή ορμής στην πράξη

Κίνηση σε μία ευθεία

Για σώμα που κινείται σε μία ευθεία γραμμή (έστω άξονας $x'x$) βρίσκουμε την μεταβολή της ορμής του με τον παρακάτω τρόπο:

- Επιλέγουμε μία θετική φορά στον άξονα.
- Στον τύπο $\Delta p = p_2 - p_1$ βάζουμε τις ορμές p_2 και p_1 με τις αλγεβρικές τους τιμές, δηλαδή ως $+mv_1$ αν η ταχύτητα έχει τη θετική φορά, ή $-mv_1$ αν η ταχύτητα έχει την αρνητική φορά. Αντίστοιχα για την p_2.
- Αν η μεταβολή της ορμής Δp έχει θετική αλγεβρική τιμή τότε το διάνυσμα $\Delta\vec{p}$ έχει τη θετική φορά του άξονα $x'x$. Αλλιώς, αν έχει αρνητική τιμή, τότε το διάνυσμα έχει την αρνητική φορά του άξονα.

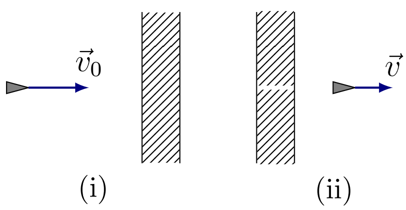
Παραδείγματα:

Α. Σφαίρα χτυπάει σε τοίχο με ταχύτητα $\vec{v}_1 = \vec{v}$ και επιστρέφει με αντίθετη ταχύτητα $\vec{v}_2 = -\vec{v}$.

$$
\begin{aligned}
\Delta\vec{p} &= \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \ \text{ και αλγεβρικά:} \\
\Delta p &= p_2 - p_1 \Leftrightarrow \\
&= (-mv) - (+mv) \Leftrightarrow \\
&= -mv - mv \Leftrightarrow \\
\Delta p &= -2mv
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Άρα η μεταβολή της ορμής $\Delta\vec{p}$ είναι διάνυσμα προς τα αριστερά. (Και συνεπώς και η δύναμη που δέχθηκε η μπάλα είναι προς τα αριστερά).

Β. Βλήμα διαπερνά ξύλινο τοίχο. Αρχικά έχει ταχύτητα $\vec{v}_0$ και μετά έχει $\vec{v}$, με $v < v_0$.



$\leftarrow$

Εδώ ας θεωρήσουμε θετική την φορά προς τα αριστερά.

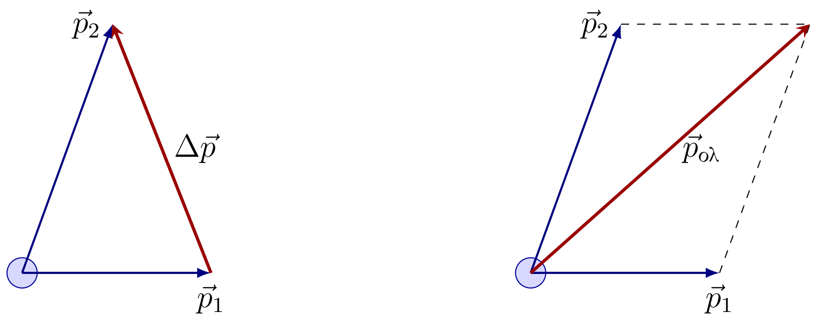
$$\begin{aligned}
\Delta\vec{p} &= \vec{p} - \vec{p}_0 \text{ και αλγεβρικά:}\\
\Delta p &= p - p_0 \Leftrightarrow\\
&= (mv) - (-mv_0) \Leftrightarrow\\
&= mv + mv_0 \Leftrightarrow\\
\Delta p &= m(v + v_0)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Αφού η μεταβολή της ορμής είναι θετική άρα το διάνυσμά της έχει την θετική φορά του σχήματος δηλαδή προς τα αριστερά (όπως και η δύναμη που δέχεται το βλήμα).

Μεταβολή ορμής στο επίπεδο

Όταν αλλάζει η κατεύθυνση της ορμής τότε τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα.

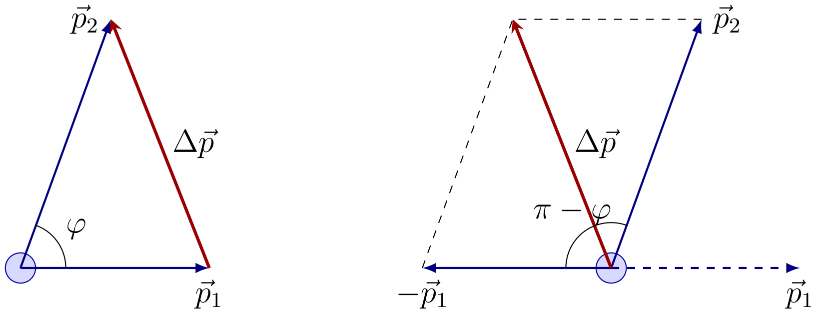
Γενικά η μεταβολή $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ είναι η διαφορά δύο διανυσμάτων. Από τα μαθηματικά (ή από τη φυσική...) ξέρουμε ότι:



Αφαίρεση διανυσμάτων **Πρόσθεση διανυσμάτων**

Η αφαίρεση διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα από το τέλος του αρχικού μέχρι το τέλος του τελικού διανύσματος, όπως στο παραπάνω σχήμα.

Μπορούμε πάντα να κάνουμε την αφαίρεση $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ ως πρόσθεση $\vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

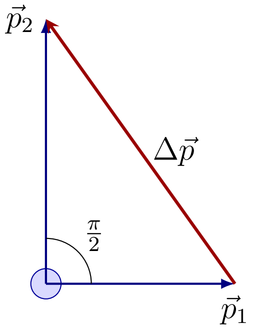


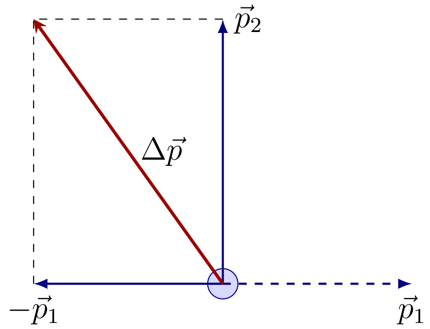
Για το μέτρο της $\Delta\vec{p}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο συνημιτόνων:

$$\Delta p = \sqrt{p_2^2 + (p_1)^2 + 2p_1p_2\,\text{συν}(\pi - \varphi)} \tag{2.6}$$

Ή να αναλύσουμε τα διανύσματα $-\vec{p}_1, \vec{p}_2$ σε κατάλληλους ορθογώνιους άξονες x, y.

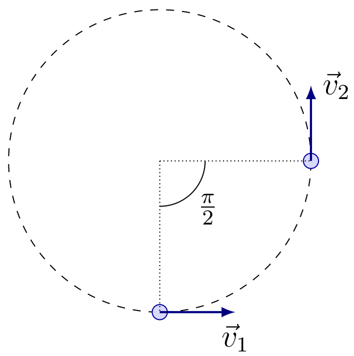
Στην πράξη θα συναντήσουμε την περίπτωση όπου τα διανύσματα είναι κάθετα, οπότε μπορούμε να δουλέψουμε με το γνωστό μας Πυθαγόρειο θεώρημα:

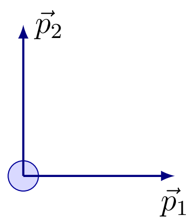




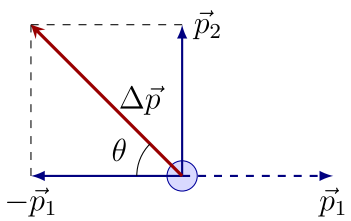
Παράδειγμα

Μεταβολή ορμής σε ομαλή κυκλική κίνηση για χρόνο $\frac{T}{4}$.





Σχήμα α′



Σχήμα β′

Σε χρόνο $\frac{T}{4}$ το σώμα γράφει γωνία $\frac{\pi}{2}$ και η αρχική ορμή είναι κάθετη στην τελική, ενώ τα μέτρα τους είναι ίσα ($p_1 = p_2 = mv$). Κατασκευάζουμε τα σχήματα α′ και β′:

$$\begin{aligned}
&\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 \;\Leftrightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)\\
&\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \Leftrightarrow\\
&\Delta p = \sqrt{2p_1^2} \Leftrightarrow\\
&\Delta p = \sqrt{2}p_1 \Leftrightarrow\\
&\Delta p = \sqrt{2}mv
\end{aligned} \tag{2.7}$$

και η γωνία θ βρίσκεται με την εφαπτομένη $\text{εφ}\,\theta = \frac{p_2}{|-p_1|} = 1$, άρα $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad σε σχέση με την κατεύθυνση της $-\vec{p}_1$, ή $\frac{3\pi}{4}$ σε σχέση με την κατεύθυνση της $\vec{p}_1$.

Μεταβολή ορμής από τον β′ νόμο

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα $\Sigma\vec{F} = \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ μπορεί να λυθεί ως προς $\Delta\vec{p}$:

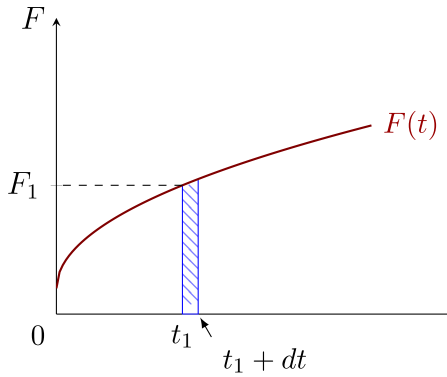
$$\Delta\vec{p} = \Sigma\vec{F}\Delta t \tag{2.8}$$

(το γινόμενο $\vec{F}\Delta t$ ονομάζεται ώθηση)

Αυτό μας δίνει ένα ακόμα τρόπο να υπολογίζουμε την μεταβολή της ορμής, σε κάποιες περιπτώσεις (όπως για παράδειγμα σε μία οριζόντια βολή).

Μεταβολή ορμής από το διάγραμμα $F = f(t)$

Έστω ένα διάγραμμα δύναμης-χρόνου:



Την χρονική στιγμή t_1 η δύναμη έχει τιμή F_1, ενώ λίγο μετά, την χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + dt$ η δύναμη έχει αλλάξει λίγο. Όταν ο χρόνος dt τείνει στο μηδέν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη μένει σχεδόν ίδια (δηλαδή F_1). Τότε το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης στήλης είναι $F_1 dt$ και ισούται με τη μεταβολή της ορμής dp στο χρονικό διάστημα dt.

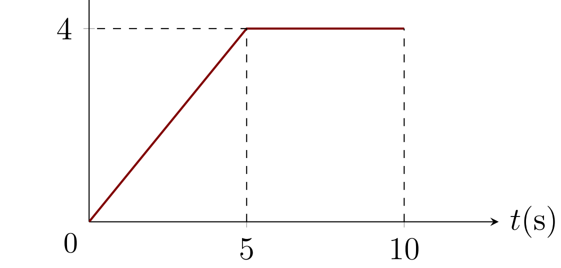
Αθροίζοντας όλες τις παρόμοιες στήλες μπορούμε να καλύψουμε το εμβαδό από όποια χρονική στιγμή έως οποιαδήποτε άλλη θέλουμε, βρίσκοντας την αντίστοιχη μεταβολή της ορμής $\Delta p = \sum dp$.

Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι **στο διάγραμμα $F = f(t)$ το εμβαδό μας δίνει την μεταβολή της ορμής** Δp (και να δώσουμε τα εύσημά μας [κοινώς kudos] στον παππού Νεύτωνα και τον προπάππου μας Αρχιμήδη...)

Στις περιπτώσεις όπου το εμβαδό υπολογίζεται εύκολα (χωρίς ολοκλήρωση) τότε η μέθοδος αυτή μας δίνει τη μεταβολή της ορμής με τον υπολογισμό ενός απλού εμβαδού. Π.χ.:

Παράδειγμα:

Έστω ένα σώμα μάζας $m = 2\text{kg}$ που την χρονική στιγμή $t = 0$ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο ευθύγραμμα ομαλά με ταχύτητα $v_0 = 5\text{m/s}$ και τότε δέχεται οριζόντια δύναμη ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητά του, της οποίας δύναμης το μέτρο δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα:



Ζητάμε τις ταχύτητες του σώματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = 5\mathrm{s}$ και $t_2 = 10\mathrm{s}$.

Από $0 \to 5s$ η μεταβολή της ορμής υπολογίζεται από το εμβαδό του τριγώνου (εύκολα) $\Delta p_1 = 10\mathrm{kgm/s}$. Επομένως η μεταβολή της ταχύτητας $\Delta v_1 = \Delta p_1/m = 5\mathrm{m/s}$. Επομένως η ταχύτητα θα είναι $v_1 = v_0 + \Delta v_1$ ή $v_1 = 10\mathrm{m/s}$. Και παρόμοια για το $5s \to 10s$